PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

N.B. : Il est demandé aux candidats de respecter les notations du texte et de donner des démonstrations claires et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Le but de ce travail est l'étude du comportement en $+\infty$, sous différentes hypothèses, d'une fonction F définie dans tout le problème par :

$$F(u) = \int_0^1 f(x)\, e^{iux} dx$$

où u est une variable réelle, f une fonction donnée à valeurs réelles ou complexes, et i le nombre complexe habituel de carré égal à -1. Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

PARTIE I

Pour toute fonction g définie sur l'intervalle $[0,1]$ et bornée, on pose :

$$N_\infty(g) = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

Pour toute fonction g définie sur l'intervalle $]0,1]$, on pose :

$$N_1(g) = \int_0^1 |g(t)|dt$$

lorsque cette intégrale existe.

Dans cette partie, la fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$.

1°/ Déterminer, en fonction de $N_1(f)$, une constante réelle positive A telle que pour tout nombre réel u :

$$|F(u)| \le A.$$

2°/ On suppose de plus que f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$ et on note f' sa dérivée. Déterminer, en fonction de $N_\infty(f)$ et de $N_1(f')$, une constante réelle positive B telle que pour tout nombre réel u :

$$|u\, F(u)| \le B.$$

Indication : utiliser une intégration par parties.

3°/ On suppose maintenant f de classe C^1 seulement sur l'intervalle $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 |f'(t)|dt$ étant convergente. Est-ce que l'inégalité établie dans la deuxième question est encore valable ? Justifier la réponse.

PARTIE II

Dans cette partie, la fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$, λ étant un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

4°/ L'intégrale définissant F(u) est-elle convergente pour tout réel u ?

5°/ Prouver la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\lambda} dx$.

6°/ On pose $Z_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\lambda} dx$. Exprimer Z_λ en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^{\lambda+1}} dx$ et en déduire que le nombre complexe Z_λ est non nul. On ne cherchera pas dans la suite du problème à calculer Z_λ.

7°/ En utilisant un changement de variable simple, prouver l'existence d'un nombre complexe C tel que F(u) soit équivalent à $\frac{C}{u^{1-\lambda}}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

8°/ Déterminer une constante réelle positive D telle que, pour tout nombre réel u strictement positif :

$$\left| \int_u^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\lambda} dx \right| \le \frac{D}{u^\lambda}$$

et en déduire l'existence d'une fonction H définie sur $]0,+\infty[$ et bornée telle que, pour tout nombre réel u strictement positif :

$$F(u) = \frac{C}{u^{1-\lambda}} + \frac{H(u)}{u}$$ (C est la constante trouvée dans la question (7°).

PARTIE III

Dans cette partie, on se donne une fonction h de classe C^1 sur $[0,1]$, un nombre réel λ appartenant à $]0,1[$, et on définit la fonction f sur $]0,1]$ par $f(x) = \frac{h(x)}{x^\lambda}$.

9°/ L'intégrale définissant F(u) est-elle convergente quelque soit le nombre réel u ?

10°/ On suppose dans cette question que $h(0) = 0$. Montrer que $x^\lambda f'(x)$ admet une limite en zéro et en déduire que u F(u) est borné.

11°/ Prouver l'existence d'une fonction K définie sur $]0,+\infty[$ et bornée telle que, pour tout u strictement positif :

$$F(u) = \frac{C\, h(0)}{u^{1-\lambda}} + \frac{K(u)}{u}$$

(C est la constante définie dans la question (7°)).

12°/ Donner un équivalent, lorsque u tend vers $+\infty$, de l'intégrale $\int_0^1 \cos(x)\, e^{iux^2} dx$

Tournez la page S. V. P.

PARTIE IV

Dans cette partie, la fonction f sera construite de sorte que soit vérifiée l'équation : $x\,(f(x))^3 \circ x\,f(x) = 1$

Une définition précise de f sera donnée dans la question (16°).

Soit ψ la fonction à valeurs réelles définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x) = x \circ x^3$.

13°/ Montrer que ψ admet une fonction réciproque φ définie sur $]0,+\infty[$ de classe C^∞ et étudier les variations de φ.

14°/ Prouver l'existence et donner la valeur d'un nombre réel α strictement compris entre 0 et 1 tel que $\varphi(x)$ soit équivalent à x^α lorsque x tend vers $+\infty$

15°/ Déterminer un nombre réel β strictement compris entre 0 et 1 tel que :

$$\lim_{x\to+\infty} (\varphi(x) - x^\alpha + \beta x^{-\beta})x^\beta = 0.$$

16°/ On définit f sur $]0,1]$ par $f(x) = \varphi(\frac{1}{x})$. Montrer que :

$$\lim_{x\to0} (f'(x) + \alpha x^{-\alpha-1} + \beta^2 x^{\beta-1})x^{1-\beta} = 0$$

α et β étant les nombres réels définis dans les questions (14°) et(15°).

17°/ Etudier le comportement asymptotique en $+\infty$ de la fonction F(u).

PARTIE V

Dans cette partie, on se donne une fonction f continue sur $[0,1]$, de classe C^1 sur $]0,1]$ telle que l'intégrale $\int_0^1 |f'(t)|dt$ converge. Soit δ un nombre réel appartenant à $]0,1[$ et pour chaque nombre entier $p \geq \frac{1}{\delta}$, on définit la fonction f_p sur $[\delta,1]$ par :

$$f_p(x) = p(f(x) - f(x-\tfrac{1}{p}))$$

18°/ Montrer que $(f_p)_{p\geq\frac{1}{\delta}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 qui converge uniformément sur $[\delta,1]$ vers f'.

19°/ Montrer que, pour chaque $p \geq \frac{1}{\delta}$: $\lim_{u\to+\infty} \int_\delta^1 f_p(x)\, e^{iux}dx = 0$

20°/ Calculer la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 f'(x)e^{iux}dx$.

21°/ On suppose que $|f(1)| \circ |f(0)|$. Donner un équivalent simple de F(u) lorsque u tend vers $+\infty$.

Application : donner un équivalent, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 \sin(x^2)\, e^{iux^2}dx$.

• • • • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail